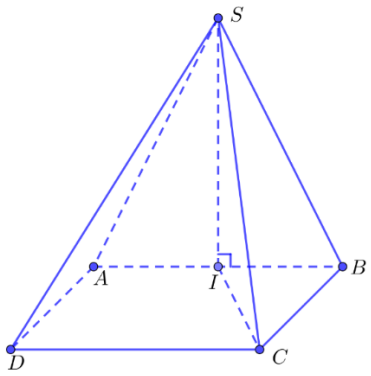
ĐỀ 9

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tan góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 1.

Giải



+) IC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$

$\Rightarrow$ góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là SCI.

I là trung điểm AB của tam giác đều SAB nên $SI=\sqrt{SB^2-IB^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác BIC vuông tại B nên $IC=\sqrt{BC^2+IB^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

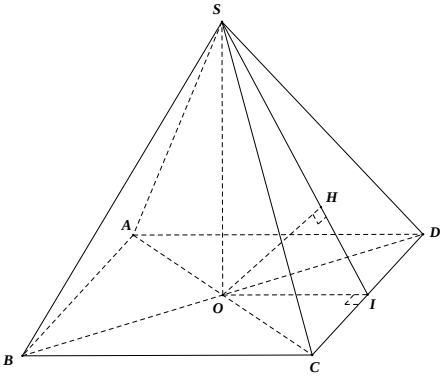
Tam giác SIC vuông tại I nên $\tan SCI=\frac{SI}{IC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 36. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, chiều cao bằng $\sqrt{3}a$.

Khoảng cách từ B đến mặt phẳng SCD bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** a. **C.** $\sqrt{3}a$. **D.** $2a$.

Giải



Ta có: $d\ B;\ SCD\ =2d\ O;\ SCD\ =2.OH=2.\frac{OI.OS}{\sqrt{OI^2+OS^2}}$.

Mà $OI=\frac{2a}{2}=a$; $OS=a\sqrt{3}$.

Do đó: $d\ B;\ SCD\ = a\sqrt{3}.$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu tâm $I\left(2;-3;1\right)$ và đi qua điểm $A\left(6;1;3\right)$ có phương trình là

A. $x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z-22=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-22=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+12x+2y+6z-10=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-12x-2y-6z-10=0$.

Giải

Mặt cầu tâm I và đi qua A có bán kính $R=IA=\sqrt{\left(6-2\right)^2+\left(1+3\right)^2+\left(3-1\right)^2}=6$.

Phương trình mặt cầu: $\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2+\left(z-1\right)^2=36\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z-22=0$.

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua $A\left(-1;1;3\right)$ và vuông góc với mặt phẳng $\left(P\right):6x+3y-2z+18=0$ có phương trình tham số là

A. $\begin{cases}x=-1+6t\\y=1+3t\\z=3-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+6t\\y=-1+3t\\z=-3-2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=6-t\\y=3+t\\z=-2+3t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-6-t\\y=-3+t\\z=2+3t\end{cases}$.

Giải

Đường thẳng cần tìm đi qua $A\left(-1;1;3\right)$ và nhận vectơ pháp tuyến của $\left(P\right)$ là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left(6;3;-2\right)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình đường thẳng là $\begin{cases}x=-1+6t\\y=1+3t\\z=3-2t\end{cases}$.

Câu 39. Cho hàm số $f\left(x\right)$, đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)-2x^2$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ lần lượt là

A. $f\left(0\right)$ và $f\left(4\right)-8$. **B.** $f\left(0\right)$ và $f\left(-1\right)-2$ **C.** $f\left(4\right)-8$ và $f\left(1\right)-2$. **D.** $f\left(16\right)-32$ và $f\left(-1\right)-2$

Giải

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)-2x^2$ với $x\in\left[-1;2\right]\Rightarrow x^2\in\left[0;4\right]$.

Ta có: $g'(x)=2x.f'\left(x^2\right)-4x=2x\left[f'\left(x^2\right)-2\right]$.

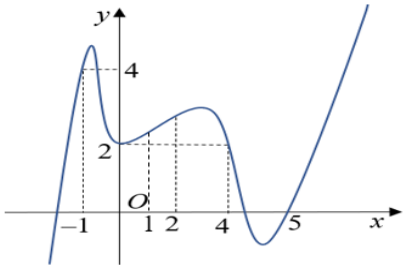
$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\f'\left(x^2\right)=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=0\\x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\notin\left[-1;2\right]\\x=2\end{array}\right.$.

Với $x^2\in\left[0;4\right]$ thì $f'\left(x^2\right)\geq2\Rightarrow f'\left(x^2\right)-2\geq0$.

Bảng biến thiên của $g\left(x\right)$

x	-1		0		2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$f(1)-2$	↘	$f(0)$	↗	$f(4)-8$

So sánh: $f\left(1\right)-2$ với $f\left(4\right)-8$



Hình phẳng (H) giới hạn bởi: $y=f'(x)$, $y=2$, $x=1$, $x=4$ có diện tích là S.

$S=\int_1^4|f'(x)-2|.dx=\int_1^4[f'(x)-2].dx=(f(x)-2x)\Big|_1^4=f(4)-8-(f(1)-2)$.

$S>0\Rightarrow f(4)-8-(f(1)-2)>0\Leftrightarrow f(4)-8>f(1)-2$.

Vậy: $\min\limits_{[-1;2]}g(x)=f(0)$ và $\max\limits_{[-1;2]}g(x)=f(4)-8$.

Chọn **A**

Câu 40. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương m sao cho có đúng 5 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn

$0\le x\le m$ và $\log_3(3x+6)-2y=\dfrac{9^y-x}{2}$.

A. $m=3^{10}-2$. **B.** $m=3^5-2$. **C.** $m=3^{15}-2$ **.D.** $m=3^{20}-2$.

Giải

• Ta có: $\log_3(3x+6)-2y=\dfrac{9^y-x}{2}\Leftrightarrow 2\left[\log_3(x+2)+1\right]-4y=3^{2y}-x$

$\Leftrightarrow x+2+2\log_3(x+2)=9^y+4y\Leftrightarrow 3^{\log_3(x+2)}+2\log_3(x+2)=3^{2y}+2.2y\ (1)$

• Xét hàm số $f(t)=3^t+2t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=3^t\ln 3+2>0\ \forall t\in\mathbb{R}$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (1) ta có: $f\left(\log_3(x+2)\right)=f(2y)$, suy ra $\log_3(x+2)=2y$.

• Vì $0\le x\le m$ nên $\log_3 2\le\log_3(x+2)\le\log_3(m+2)\Rightarrow\log_3 2\le 2y\le\log_3(m+2)$.

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\log_3 2\le y\le\dfrac{1}{2}\log_3(m+2)$.

Do y nguyên dương nên $1\le y\le\dfrac{1}{2}\log_3(m+2)$.

Để có đúng 5 cặp số nguyên $(x;y)$ thì $\dfrac{1}{2}\log_3(m+2)=5\Leftrightarrow m=3^{10}-2$

Vậy $m=3^{10}-2$. Chọn **A**

Câu 41. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x^2+6x & khi\ x\ge 2\\ \dfrac{2}{2x-5}+26 & khi\ x<2\end{cases}$. Tích phân $I=\int_e^{e^2}\dfrac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx$ bằng

A. $15-\dfrac{64}{5}\ln 2+\dfrac{1}{5}\ln 3$. **B.** $15+\dfrac{64}{5}\ln 2-\dfrac{1}{5}\ln 3$. **C.** $15+\dfrac{64}{5}\ln 2+\dfrac{1}{5}\ln 3$. **D.** $15-\dfrac{64}{5}\ln 2-\dfrac{1}{5}\ln 3$.

Giải

Xét $I=\int_e^{e^2}\dfrac{f(\ln^2 x)}{x\ln x}dx$.

Đặt $u=\ln^2 x\Rightarrow du=\dfrac{2\ln x}{x}.dx\Rightarrow\dfrac{du}{2.\ln^2 x}=\dfrac{dx}{x.\ln x}\Rightarrow\dfrac{du}{2u}=\dfrac{dx}{x.\ln x}$

Đổi cận : $\begin{cases} x=e \Rightarrow u=1 \\ x=e^2 \Rightarrow u=4 \end{cases}$.

Khi đó

$$I=\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(u)}{u}.du=\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f(x)}{x}.dx=\frac{1}{2}\left[\int_1^2 \frac{f(x)}{x}.dx+\int_2^4 \frac{f(x)}{x}.dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_1^2\left(\frac{2}{x(2x-5)}+\frac{26}{x}\right).dx+\int_2^4\left(\frac{3x^2+6x}{x}\right).dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{5}\int_1^2\left(\frac{1}{2x-5}+\frac{32}{x}\right)dx+\int_2^4(3x+6).dx\right]$$

$$=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\ln|2x-5|+32.\ln|x|\right)\Big|_1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}.x^2+6x\right)\Big|_2^4$$

$$=15+\frac{64}{5}.\ln 2-\frac{1}{5}.\ln 3$$

Chọn **B**.

Câu 42. Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=2021^2$ và $(z+2021i)\left(\overline{z}-\frac{1}{2021}\right)$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Giải

Gọi số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=a-bi$

Theo đề bài, $|z|=2021^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=2021^4\ (1)$

Xét:

$$(z+2021i)\left(\overline{z}-\frac{1}{2021}\right)=z\overline{z}-\frac{1}{2021}z+2021i\,\overline{z}-i=2021^4-\frac{1}{2021}(a+bi)+2021.i(a-bi)-i$$

$$=\left(2021^4-\frac{1}{2021}a+2021b\right)+\left(2021a-\frac{1}{2021}b-1\right)i$$

$(z+2021i)\left(\overline{z}-\frac{1}{2021}\right)$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow 2021^4-\frac{1}{2021}a+2021b=0 \Leftrightarrow a=2021^2\left(2021^3+b\right)$

Thế $a=2021^2\left(2021^3+b\right)$ vào phương trình (1), ta được:

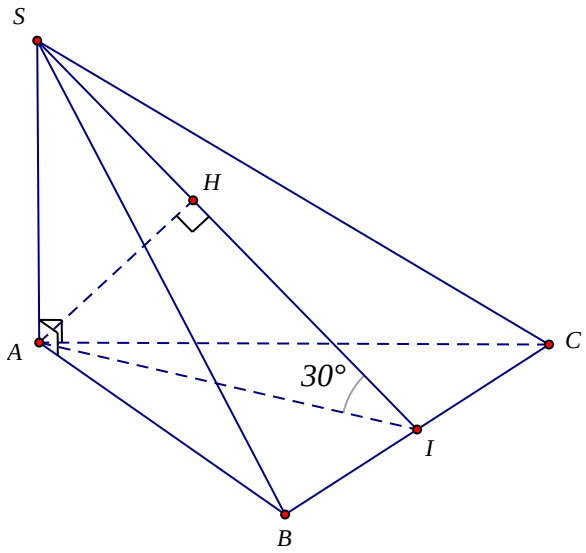
$$2021^4\left(2021^3+b\right)^2+b^2=2021^4 \Leftrightarrow \left(2021^4+1\right)b^2+2.2021^7 b+2021^{10}-2021^4=0$$

Phương trình này vô nghiệm. Vậy không có số phức nào thỏa đề bài. Chọn **B**

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA\perp(ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) một góc $30°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{8a^3}{9}$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{4a^3}{9}$.

Giải



Gọi I là trung điểm sủa BC suy ra góc giữa mp (SBC) và mp (ABC) là $SIA = 30°$.

H là hình chiếu vuông góc của A trên SI suy ra $d(A,(SBC)) = AH = a$.

Xét tam giác AHI vuông tại H có: $AI = \dfrac{AH}{\sin 30°} = 2a$.

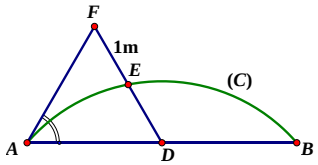
Xét tam giác SAI vuông tại A có: $SA = AI.\tan 30° = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng x, mà AI là đường cao nên: $2a = x\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \left(\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{8a^3}{9}$. Chọn **A**

Câu 44. Mặt tiền nhà ông An có chiều ngang $AB = 4m$, ông An muốn thiết kế lan can nhô ra có dạng là một phần của đường tròn (C) (hình vẽ). Vì phía trước vướng cây tại vị trí F nên để an toàn, ông An cho xây đường cong cách 1m tính từ trung điểm D của AB. Biết $AF = 2m$, $DAF = 60^0$ và lan can cao 1 m làm bằng inox với giá $2,2$ triệu/m^2. Tính số tiền ông An phải trả (làm tròn đến hàng ngàn).



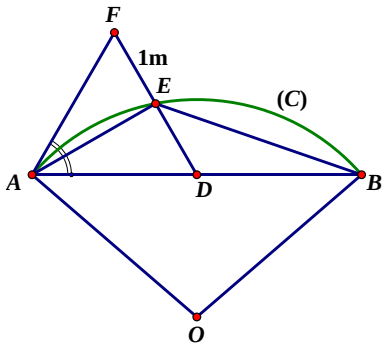
A. $7,568,000$. **B.** $10,405,000$. **C.** $9,977,000$. **D.** $8,124,000$.

Giải

Theo giả thiết, ta có ΔAFD đều nên $FD = 2m$ suy ra $ED = 1m$, $EAD = 30^0$ và $EDB = 120^0$.

Trong tam giác ΔEDB có $EB^2 = DE^2 + DB^2 - 2.DE.DB.\cos 120^o = 7 \Rightarrow EB = \sqrt{7}$.

Gọi R là bán kính của đường tròn (C) tâm O, áp dụng định lý sin trong tam giác ΔAEB ta có $\frac{EB}{\sin EAD} = 2R$, suy ra $R = \sqrt{7}$.



Xét tam giác OAB có $R = OA = OB = \sqrt{7}$, $AB = 4$, suy ra $\cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA.OB} = -\frac{1}{7}$.

Khi đó $AOB \simeq 98,2^0$, suy ra độ dài dây cung (C) xấp xỉ $4,54m$.

Vì chiều cao của lan can là $1m$ và giá kính là 2,2 triệu/m^2 nên số tiền ông An phải trả xấp xỉ $9,977,000$ đ.

Chọn **C**

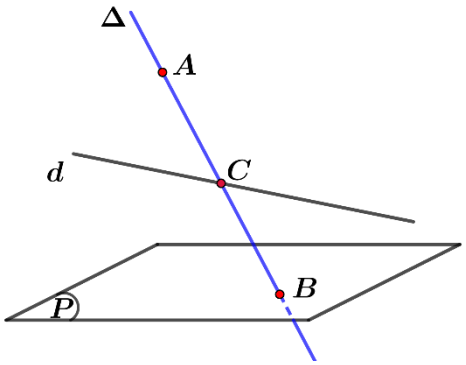
$(l = R.k^o \frac{\pi}{180^o} = \sqrt{7}.98,2.\frac{\pi}{180} \approx 4,54)$

Câu 45. Trong không gian, cho mặt phẳng $(P): x + 3y - 2z + 2 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;2;-1)$, cắt mặt phẳng (P) và đường thẳng d lần lượt tại B và C sao cho C là trung điểm AB là

A. $\begin{cases} x = 1 + 18t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -17 + 18t \\ y = 5 + 3t \\ z = t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 1 - 18t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -17 + 18t \\ y = 5 - 3t \\ z = -t \end{cases}$.

Giải



Từ giả thiết ta có: $C \in d \Rightarrow C(1+2t;-1-t;4+t)$.

Do C là trung điểm của $AB \Rightarrow B(4t+1;-2t-4;2t+9)$.

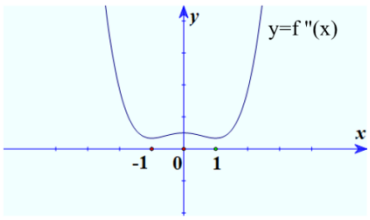
Ta có : $\Delta \cap (P) = B \Rightarrow B \in (P) \Rightarrow 4t + 1 + 3(-2t-4) - 2(2t+9) + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{9}{2}$.

Suy ra $B(-17;5;0)$. Đường thẳng Δ đi qua hai điểm B và A.

Khi đó vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{BA} = (18;-3;-1)$.

Vậy phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x = -17 + 18t \\ y = 5 - 3t \\ z = -t \end{cases}$. Chọn **D**

Câu 46. Cho hàm số $f\left(x\right)$ biết hàm số $y=f''(x)$ là hàm đa thức bậc 4 có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x)=2f\left(\frac{1}{2}x^2\right)+f\left(-x^2+6\right)$, biết rằng $g(0)>0$ và $g\left(2\right)<0$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=\left|g\left(x\right)\right|$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 6.

Giải

Từ đồ thị hàm số $y=f''(x)$ ta có $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $y=f'\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x)=2x.f'\left(\frac{1}{2}x^2\right)-2x.f'\left(-x^2+6\right)=2x\left[f'\left(\frac{1}{2}x^2\right)-f'\left(-x^2+6\right)\right].$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=0\\f'\left(\frac{1}{2}x^2\right)=f'\left(-x^2+6\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\\frac{1}{2}x^2=-x^2+6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\\x=2\end{array}\right.$$

(do hàm số $y=f'\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$)

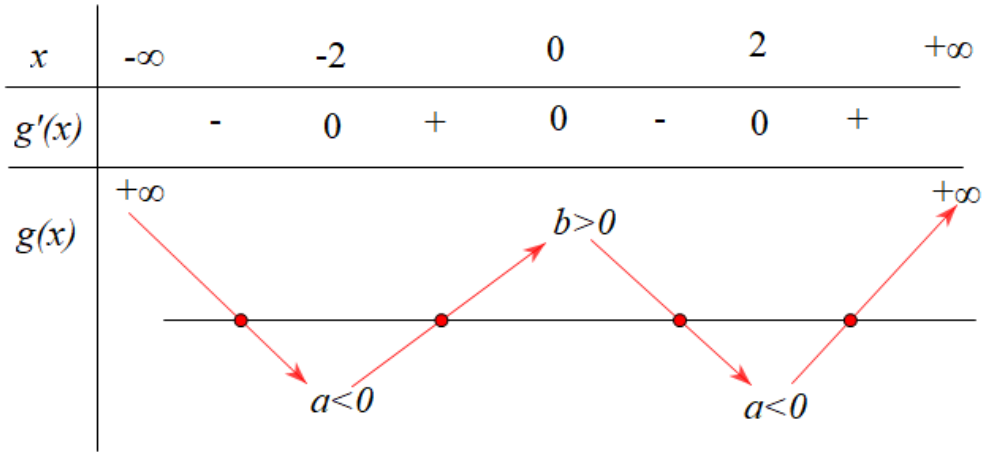
Xét $g'(x)>0\Leftrightarrow 2x\left[f'\left(\frac{1}{2}x^2\right)-f'\left(-x^2+6\right)\right]>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x>0\\\frac{1}{2}x^2>-x^2+6\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}x<0\\\frac{1}{2}x^2<-x^2+6\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\-2<x<0\end{array}\right.$.

Suy ra $g'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2\\0<x<2\end{array}\right.$.

Vì $g(x)=2f\left(\frac{1}{2}x^2\right)+f\left(-x^2+6\right)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ và có $g\left(2\right)<0$ nên

$g\left(-2\right)=g\left(2\right)=a<0,\ g(0)=b>0$.

Bảng biến thiên của hàm số $g\left(x\right)$:



Vậy hàm số $y=|g(x)|$ có 7 điểm cực trị. Chọn **C**

Câu 47. Có bao nhiêu số nguyên a $(a>3)$ để phương trình $\log\left[(\log_3 x)^{\log a}+3\right]=\log_a(\log_3 x-3)$ có nghiệm $x>81$.

A. 12. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Giải

Xét $\log\left[(\log_3 x)^{\log a}+3\right]=\log_a(\log_3 x-3)$

$\Leftrightarrow a^{\log\left[(\log_3 x)^{\log a}+3\right]}=\log_3 x-3\Leftrightarrow\left[(\log_3 x)^{\log a}+3\right]^{\log a}=\log_3 x-3$, (1) .

+ Đặt $y=\log_3 x\Rightarrow y>4$.(vì $x>81$)

Đặt $m=\log a>0$, phương trình (1) có dạng $\left(y^m+3\right)^m=y-3$ (2).

+ Đặt $t=y^m+3>0$, pt (2) trở thành hệ phương trình $\begin{cases}t^m=y-3\\ t=y^m+3\end{cases}\Rightarrow y^m+y=t^m+t$ (3).

. + Xét hàm số $f(k)=k^m+k$, $(m>0\,,k>0)$ có $f'(k)=mk^{m-1}+1>0\,,\forall k>0$

Suy ra $f(k)=k^m+k$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

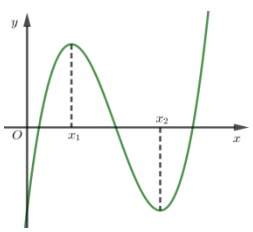
+ Do đó $(3)\Leftrightarrow f(y)=f(t)\Leftrightarrow y=t\Leftrightarrow y=y^m+3\Leftrightarrow y^m=y-3\Leftrightarrow m.\log y=\log(y-3)$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{\log(y-3)}{\log y}$. Với $y>4$ ta được: $0<\log(y-3)<\log y\Rightarrow 0<\dfrac{\log(y-3)}{\log y}<1$.

Do đó $0<m<1\Leftrightarrow 0<\log a<1\Leftrightarrow 1<a<10$.

Mà a nguyên và $a>3$ nên $a\in\{4;5;6;7;8;9\}$. Chọn **B**

Câu 48. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới. Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$; $f(x_1)+f(x_2)=0$ và $\int\limits_{x_1}^{x_1+1}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{5}{4}$. Tính $L=\lim\limits_{x\to x_1}\dfrac{f(x)-2}{(x-x_1)^2}$.



A. -1. **B.** -2. **C.** -3 . **D.** -4.

Giải

Giả sử $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$.Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2=x_1+2\end{array}\right.$.

Suy ra: $f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_2)\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)(x-x_1-2)$

$\Rightarrow f'(x)=3a(x-x_1)^2-6a(x-x_1)$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta có: $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+C$.

Khi đó $f(x_1)=C$ và $f(x_2)=a(x_2-x_1)^3-3a(x_2-x_1)^2+C=8a-12a+C=C-4a$.

Mà $f(x_1)+f(x_2)=0$, nên $C+C-4a=0\Leftrightarrow C=2a$.

Suy ra $f(x)=a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a$.

Mặt khác $\int\limits_{x_1}^{x_1+1}f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\int\limits_{x_1}^{x_1+1}\left[a(x-x_1)^3-3a(x-x_1)^2+2a\right]\mathrm{d}x=\frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow\left[\frac{a}{4}(x-x_1)^4-a(x-x_1)^3+2ax\right]\Big|_{x_1}^{x_1+1}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow\left[\frac{a}{4}-a+2a(x_1+1)\right]-2ax_1=\frac{5}{4}\Leftrightarrow a=1$.

Do đó: $f(x)=(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2+2$.

Vậy $L=\lim\limits_{x\to x_1}\frac{f(x)-2}{(x-x_1)^2}=\lim\limits_{x\to x_1}\frac{(x-x_1)^3-3(x-x_1)^2}{(x-x_1)^2}=\lim\limits_{x\to x_1}\left[(x-x_1)-3\right]=-3$.

Chọn **C**

Câu 49. Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=2$ và $|z_1+z_2|=\sqrt{10}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\left|(2z_1-z_2)(1+\sqrt{3}i)+1-\sqrt{3}i\right|$

A. 6. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 34.

Giải

Đặt $z_1=a+bi, z_2=c+di$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Vì $|z_1|=|z_2|=2\Rightarrow|z_1|^2=|z_2|^2=4\Rightarrow a^2+b^2=c^2+d^2=4$.

Mặt khác $(a+c)^2+(b+d)^2=10$

$\Leftrightarrow a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2=10\Rightarrow ac+bd=1$.

Ta có $2z_1-z_2=(2a-c)+(2b-d)i$ nên

$|2z_1-z_2|^2=(2a-c)^2+(2b-d)^2=4(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-4(ac+bd)=16\Rightarrow|2z_1-z_2|=4$.

Áp dụng bất đẳng thức $|z+z'|\le|z|+|z'|$, ta có

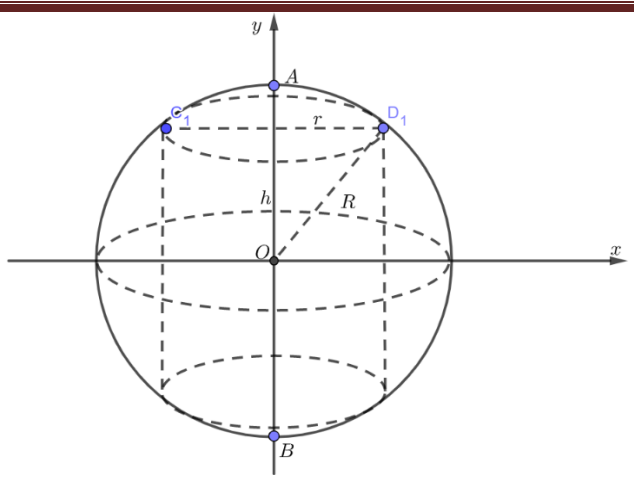
$P=\left|(2z_1-z_2)(1+\sqrt{3}i)+1-\sqrt{3}i\right|\le\left|(2z_1-z_2)(1+\sqrt{3}i)\right|+\left|1-\sqrt{3}i\right|\le 4.2+2=10$.

Vậy $\max P=10$. Chọn **B**

Câu 50. Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;3;0)$, $B(0;-3;0)$. Mặt cầu (S) nhận AB là đường kính. Hình trụ (H) là hình trụ có trục thuộc trục tung, nội tiếp với mặt cầu và có thể tích lớn nhất. Khi đó mặt phẳng chứa đáy của hình trụ đi qua điểm nào sau đây?

A. $(\sqrt{3};0;0)$. **B.** $(\sqrt{3};\sqrt{3};0)$. **C.** $(\sqrt{3};2;1)$. **D.** $(\sqrt{3};\sqrt{2};\sqrt{3})$.

Giải



Bán kính của mặt cầu là $R=\frac{AB}{2}=3$.

Gọi chiều cao của hình trụ là $2h$, $h>0$. Do đó bán kính của hình trụ là $r=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{9-h^2}$.

Thể tích khối trụ là $V=\pi.r^2.2h=\pi.\left(9-h^2\right).2h=\pi\sqrt{2}\sqrt{\left(9-h^2\right)\left(9-h^2\right).2h^2}$.

$$V\le\pi\sqrt{2}.\sqrt{\left(\frac{9-h^2+9-h^2+2h^2}{3}\right)^3}=\pi\sqrt{2}.6\sqrt{6}=12\pi\sqrt{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 9-h^2=2h^2\Leftrightarrow h=\sqrt{3}$.

Khi đó hình trụ có thể tích lớn nhất là $12\pi\sqrt{3}$.

Vậy hai mặt đáy của trụ có phương trình tương ứng là $y=\sqrt{3};y=-\sqrt{3}$. Chọn **B**

Chú ý: Nếu không dùng BĐT Cauchy cho 3 số $9-h^2$, $9-h^2$, $2h^2$ như trên thì có thể khảo sát hàm số

$f(h)=V=\pi\left(9-h^2\right).2h=\pi\left(-2h^3+18h\right)$

$\Rightarrow f'(h)=\pi\left(-6h^2+18\right)$

$f'(h)=0\Rightarrow h=\sqrt{3}$, $(do\ h>0)$

Khi đó hình trụ có thể tích lớn nhất là $12\pi\sqrt{3}$.

Vậy hai mặt đáy của trụ có phương trình tương ứng là $y=\sqrt{3};y=-\sqrt{3}$. Chọn **B**